

Izvorni naučni članak

UDK: 005.311.12:519.865; 336.76

doi: 10.5937/ekonhor1403211D

## REBALANS PORTFOLIJA HARTIJA OD VREDNOSTI PRIMENOM MODELA MARKOWITZ-A SA KONTROLOM OBIMA REBALANSA

Mikica Drenovak\*, Vladimir Ranković

*Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu*

Upravljanje portfolijom hartija od vrednosti podrazumeva periodični rebalans portfolija, tj. promenu strukture portfolija sa ciljem prilagođavanja okolnostima na tržištu. Svrha rebalansa jeste da se poprave performanse portfolija prema zadatom kriterijumu. Cilj ovog istraživanja je testiranje dva nova pristupa rebalansu portfolija hartija od vrednosti, jednog zasnovanog na optimalnoj vrednosti tržišnog rizika, a drugog na optimalnom odnosu rizika i prinosa. Za inicijalnu alokaciju i rebalans u radu koristimo optimalnu volatilnost ili Sharpe-ov količnik. Kako bi ponuđena rešenja bila primenljiva u praksi, uvodimo okidače za rebalans i na taj način kontrolišemo obim rebalansa portfolija i, posredno, ukupne transakcione troškove. Rezultati ukazuju na to da je strategija periodične minimizacije volatilnosti portfolija odgovarajuća alternativa za investitore netolerantne na rizik jer, uz umereni obim i nisku dinamiku rebalansa, obezbeđuje portfolio sa boljim vrednostima rizika u poređenju sa referentnim S&P 100 tržišnim indeksom i 1/n portfolijom.

**Ključne reči:** upravljanje portfolijom, volatilnost, Sharpe-ov količnik, rebalans portfolija, obim rebalansa

JEL Classification: C44, C61, G11

### UVOD

Upravljanje portfolijom počinje alokacijom sredstava. Postoji konsenzus da početna alokacija u značajnoj meri utiče na performanse (Arshanapalli, Coggin & Nelson, 2001). Aktivno upravljanje portfolijom podrazumeva rebalans postojećeg portfolija kupovinom i prodajom hartija od vrednosti. Cilj rebalansa jeste da se unaprede performanse posmatranog portfolija prilagođavanjem trenutnim tržišnim uslovima i/ili očekivanjima.

Međutim, rebalans portfolija izaziva troškove trgovanja (transakcione troškove), koji negativno utiču na krajnji prinos. Zbog toga se transakcioni troškovi neizostavno uzimaju u obzir prilikom razvoja dinamičkog modela upravljanja portfolijom u realnim tržišnim uslovima. (Choi, Jang & Koo, 2007; Kozhan & Schmid, 2009).

Decenijama unazad tržišni rizik se definiše kao varijansa (odnosno, volatilnost) prinosa portfolija. Portfolio alokacija je tradicionalno zasnovana na H. M. Markowitz-evom modelu odnosa prinosa i varijanse (*mean-variance model*) (Markowitz, 1952; Fabozzi, Focardi & Jonas, 2007). U ovom radu, u okvirima

\* *Korespondencija:* M. Drenovak, Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, Đ. Pucara 3, 34000 Kragujevac, Srbija;  
e-mail: mdrenovak@kg.ac.rs

Markowitz-evog modela, razmatramo dve različite strategije upravljanja portfolijom hartija od vrednosti. Jedna je bazirana na periodičnoj minimizaciji tržišnog rizika merenog volatilnošću prinosa (*volatility*), a druga na periodičnoj maksimizaciji tzv. W. F. Sharpe-ovog količnika (1966).

Rešavanje problema portfolio alokacije zasnovano je na „pomirenju“ dva suprotstavljena cilja - minimizacija rizika i maksimizacija prinosa. Tržišni rizik (Alexander, 2008) predstavlja rizik od nepovoljnih kretanja cena finansijskih instrumenata. Međutim, dok je regulator primarno zainteresovan za aspekt rizika portfolija hartija od vrednosti (Jaksic, 2012), investitori su prevashodno zainteresovani za prinos, pa rizik posmatraju samo u kontekstu prinosa (realizovanih ili očekivanih). Po pravilu, portfolio menadžeri u izveštajima o performansama portfolija navode vrednost realizovanog prinosa po jedinici rizika za posmatrani period. U finansijskim izveštajima standardno je navođenje Sharpe-ovog količnika, definisanog kao prinos po jedinici utvrđene volatilnosti (Bacon, 2008).

Cilj ovog istraživanja je da se utvrdi da li periodični rebalans portfolija, zasnovan na optimizaciji volatilnosti (ili alternativno Sharpe-ovog količnika), može da obezbedi bolje performanse (i u kom kontekstu bolje) upravljanog portfolija u odnosu na predloženi reper.

U skladu sa postavljenim ciljem istraživanja u radu ćemo testirati dve hipoteze:

- H1: Primenom periodične minimizacije volatilnosti dobija se portfolio sa boljim parametrima rizika u odnosu na izabrane repere.
- H2: Primenom periodične maksimizacije Sharpe-ovog količnika dobija se portfolio sa većim Sharpe-ovim količnikom u odnosu na izabrane repere.

S ciljem da kontrolišemo obim rebalansa, uvodimo različite okidače (uslove) za aktiviranje postupka rebalansa. U ovom istraživanju kao oportunitetni skup koristimo skup od 40 konstituenata tržišnog indeksa S&P 100. Za period upravljanja portfolijom usvojili smo period od 2 godine. Performanse upravljanog portfolija u pogledu odnosa rizik-prinos, kao i ukupnog obima rebalansa, poredimo sa performansama indeksa S&P

100, usvojenog da bude tržišni benčmark<sup>1</sup>, kao i sa performansama 1/n portfolija koji predstavlja osnovnu („naivnu“) portfolio strategiju.

Izbor strategije rebalansa portfolija zavisi od investicionog cilja koji investitor želi da postigne (Hsu, 2012). U literaturi koja se odnosi na probleme rebalansa portfolija različiti autori su razmatrali različite strategije rebalansa i njihov uticaj na sveukupne performanse portfolija hartija od vrednosti. B. Arshanapalli i ostali (2001) analizirali su uticaj strukture alokacije sredstava na performanse portfolija sa fiksnim ponderima, kao i sa različitim dinamičkim portfolijima, sa uključivanjem transakcionih troškova. C. Donohue i K. Yip (2003) ispitali su efekte različitih heurističkih strategija rebalansa na performanse portfolija u kontekstu rizika, prinosa, Sharpe-ovog količnika, obima rebalansa i transakcionih troškova. Rezultati pokazuju da postoji kompromis između optimalnog rebalansa i transakcionih troškova<sup>2</sup>. K. Sippel (2012) je analizirao uticaj obima rebalansa na sveukupne performanse strategije rebalansa koja za cilj ima održavanje definisanog nivoa rizika. Autor predlaže uvođenje transakcionih pragova značaja u cilju smanjenja ukupnih transakcionih troškova, što za posledicu ima povećanje krajnjih prinosa upravljanog portfolija. V. DeMiguel, G. Lorenzo i U. Raman (2009) analiziraju performanse 14 različitih tipova Markowitz-evog modela optimalnog strukturiranja portfolija. Autori su pokazali da „naivna“ 1/n strategija strukturiranja portfolija u proseku daje, u pogledu sveukupnih performansi upravljanog portfolija, bolje rezultate čak i od složenijih portfolio strategija poznatih u praksi. A. A. Gaivoronsky, S. Krylov i N. Van der Wijst (2005) analizirali su strategiju strukturiranja portfolija baziranu na replikaciji usvojenog benčmarka (*benchmark tracking approach*). Autori su razvili nekoliko algoritama za strukturiranje portfolija baziranih na različitim merama rizika i testirali ih na velikom broju uzoraka. Rezultati pokazuju da strategija bazirana na replikaciji benčmarka može da bude veoma efikasna strategija investiranja. J. R. Yu i W. Y. Lee (2011) su analizirali pet različitih modela rebalansa portfolija baziranih na kombinovanju različitih kriterijuma rebalansa, uključujući rizik, prinos, zabranu kratkih pozicija, asimetričnosti i spljoštenosti distribucija prinosa, kao i analizu transakcionih troškova. Autori su primenili fazi višekriterijumsko programiranje u

cilju definisanja opšteg višekriterijumskog modela rebalansa portfolija.

Devastirajući efekti poslednje svetske ekonomske krize imaju za rezultat da su danas i investitori i regulatori zainteresovani za merenje takozvanog rizika ekstremnih kvantila. Uprkos nepovoljnim matematičkim osobinama (Artzner, Delbaen, Eber & Heath, 1999; Szego, 2002), vrednost pod rizikom (VaR) je najčešće korišćena mera rizika ekstremnih kvantila i postala je standard regulative koja se odnosi na bankarsko poslovanje (Basel Committee on Banking Supervision, 1996<sup>3</sup>). Prema poslednjim međunarodnim propisima, na osnovu VaR-a investicionih portfolija banke određuje se iznos obaveznih rezervi. Iz tog razloga, mi ćemo analizirati i karakteristike upravljanih portfolija u kontekstu vrednosti pod rizikom.

Struktura rukopisa je sledeća: u drugoj sekciji, uvodimo koncepte prinosa portfolija i obima rebalansa. Definicija rizika i Sharpe-ovog količnika koje koristimo u ovom istraživanju date su u trećoj sekciji. Model optimizacije dat je u četvrtoj sekciji. U sledećoj sekciji predstavili smo strategije rebalansa. Nakon predstavljanja empirijskih rezultata, opredeljeni su zaključci i predlozi za buduća istraživanja.

## MATEMATIČKA INTERPRETACIJA PRINOSA PORTFOLIJA I OBIMA REBALANSA

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove portfolio teorije korišćene u istraživanju.

Procentualni prinos portfolija za posmatrani period u trenutku  $t$  definisan je sledećim izrazom:

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_{i,t-1} r_{i,t} \quad (1)$$

gde  $r_{i,t}$  označava prinos hartije  $i$  u trenutku  $t$ , a  $w_{i,t}$  označava težinski koeficijent, odnosno, udeo kapitala investiranog u hartiju  $i$  u trenutku  $t$ .

Izraz (1) predstavlja fundamentalnu relaciju u portfolio matematici (Alexander, 2008).

Koeficijent  $w_{i,t}$  je definisan sledećim izrazom:

$$w_{i,t} = \frac{n_i p_{i,t}}{\sum_{i=1}^N n_i p_{i,t}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

gde  $n_i$  označava broj kupljenih hartija od vrednosti  $i$ , a  $p_{i,t}$  cenu jedne hartije  $i$  u trenutku  $t$ .

Broj hartija od vrednosti  $n_i$  ostaje isti za svaku hartiju od vrednosti  $i$  u periodu između dva rebalansa (tj. portfolio je statički u tom periodu). S druge strane, vrednost težinskog koeficijenta  $w_{i,t}$  se menja u periodu između dva rebalansa svaki put kad se promeni cena bilo koje hartije portfolija. Transakcioni troškovi, koji se javljaju prilikom svakog rebalansa, mogu da imaju veliki uticaj na sveukupni prinos upravljanog portfolija. U praksi, portfolio menadžer mora da kontroliše transakcione troškove prilikom rebalansa kako ne bi narušio sveukupne performanse upravljanog portfolija. Drugim rečima, portfolio menadžer će izvršiti rebalans portfolija samo ukoliko se zahtevani transakcioni troškovi nalaze u prihvatljivim granicama. Zbog toga se transakcioni troškovi u teoriji upravljanja portfolijom posmatraju kao ograničenje. U opštem slučaju, transakcioni troškovi zavise od velikog broja faktora, ali je u svakom obrascu za računanje transakcionih troškova osnovna promenljiva obim trgovanja. Zbog toga, u ovom istraživanju, kao približnu meru transakcionih troškova koristimo obim rebalansa portfolija. Portfolio turnover u trenutku  $t$ , definiše se kao relativni udeo u vrednosti portfolija i može da se izračuna po sledećem obrascu (DeMiquel *et al*, 2009):

$$\text{Obim rebalansa}(t) = \sum_{i=1}^N |w_{i,t} - w_{i,t-1}| \quad (3)$$

## RIZIK EKSTREMNIH KVANTILA I SHARPE-OV KOLIČNIK

### Volatilnost

Varijabilnost portfolija tradicionalno se izražava varijansom prinosa portfolija:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r}_p)^2, \text{ gde je } r_t \text{ prinos portfolija u}$$

trenutku  $t$ ,  $\bar{r}_p$  prosečni prinos portfolija. Često se umesto varijanse koristi standardna devijacija prinosa,  $\sigma_p$ , tj. kvadratni koren varijanse, kao mera varijabilnosti, imajući u vidu da je standardna devijacija veličina istog reda kao i prosečni prinos. U izveštajima za investitore standardna mera varijabilnosti portfolija je volatilitnost, koja se računa kao anualizovana standardna devijacija prinosa<sup>4</sup>:

$$\text{volatilitnost} = \sigma_p \sqrt{252} \quad (4)$$

### Sharpe-ov količnik

Sharpe-ov količnik<sup>5</sup> meri prinos portfolija po jedinici rizika. Ovo je jedna od najčešće korišćenih mera performansi portfolija koja objedinjuje prinos i rizik (*risk-adjusted return*). U praksi, prinos se obično računa relativno u odnosu na bezrizičnu kamatnu stopu dok se rizik, izvorno, meri standardnom devijacijom prinosa portfolija u posmatranom periodu, pa se, u skladu sa tim, Sharpe-ov količnik može formalno definisati kao:

$$\text{Sharpe} = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}, \quad (5)$$

gde je  $\bar{r}_p$  stopa prosečnog (realizovanog ili očekivanog u zavisnosti od toga da li je vrednost računata u *ex post* ili *ex ante* kontekstu) prinosa portfolija,  $r_f$  bezrizična kamatna stopa, a  $\sigma_p$  standardna devijacija portfolija u posmatranom periodu. Na osnovu izraza (5) jasno je da će, od dva portfolija sa jednakim stopama prinosa, veću vrednost Sharpe-ovog količnika imati onaj portfolio sa manjom standardnom devijacijom stope prinosa. Sharpe-ov količnik je u praksi standardna mera za ocenu performansi portfolija, jer omogućava poređenje dva portfolija koji imaju različite prosečne prinose i vrednosti rizika.

### OPTIMIZACIONI MODEL

U ovom radu analiziramo dve različite strategije upravljanja portfolijom zasnovane na: a) minimizaciji volatilitnosti portfolija, i b) maksimizaciji Sharpe-ovog

količnika portfolija. Opšta forma optimizacionog modela je:

$$\text{a) } \min \text{ volatilitnost} (r_p(\mathbf{w})) \quad (6)$$

$$\text{b) } \max \text{ Sharpe} (r_p(\mathbf{w}))$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (7)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

pri čemu  $w$  označava vektor težinskih koeficijenata  $w_i$ ,  $\text{volatilitnost}(r_p(\mathbf{w}))$  označava volatilitnost portfolija,  $\text{Sharpe}(r_p(\mathbf{w}))$  označava Sharpe-ov količnik, a  $N$  ukupan broj hartija od vrednosti.

Jednačina (6) definiše kriterijume optimizacije, jednačina (7) predstavlja standardno ograničenje budžeta koje nameće da je zbir svih težinskih koeficijenata jednak 1. Jednačina (8) nameće ograničenje da težinski koeficijenti moraju da budu pozitivni, što u praksi znači da nije dozvoljeno zauzimanje kratkih pozicija.

Treba naglasiti da su vrednosti kriterijuma optimizacije (Volatilitnost i Sharpe-ov količnik) računati na osnovu vremenske serije realizovanih prinosa portfolija. Da bi se odredila vremenska serija realizovanih prinosa potencijalnog portfolija, neophodno je dnevno preračunavanje težinskih koeficijenata  $w_{i,t}$ .

### STRATEGIJE REBALANSA

Strategije rebalansa koje su razmatrane u ovom radu su bazirane na dnevnoj optimizaciji portfolija po usvojenom kriterijumu optimizacije (jednačina (6)).

Na početku perioda upravljanja portfolijom neophodno je usvojiti inicijalni portfolio. U ovom radu smo usvojili da inicijalni portfolio bude portfolio koji je optimizovan po predloženom kriterijumu optimizacije, tj. u slučaju strategije bazirane na minimizaciji volatilitnosti inicijalni portfolio je portfolio koji ima minimalnu volatilitnost, a u slučaju strategije koja se bazira na maksimizaciji Sharpe-ovog količnika inicijalni portfolio je portfolio sa najvećom vrednošću Sharpe-ovog količnika. Inicijalni portfolio je definisan



vektorom težinskih koeficijenata  $w$ . Međutim, aktuelni portfolio je definisan brojem kupljenih hartija svake od hartija od vrednosti iz oportunitetnog skupa. Zbog toga je neophodno prevođenje težinskih koeficijenata u broj odgovarajućih hartija od vrednosti. Da bi to bilo moguće, prepostavili smo da je inicijalna vrednost portfolija 1 milion novčanih jedinica.

Ovde predloženo upravljanje portfolijom se sastoji u sledećem: Svakog dana u okviru usvojenog perioda upravljanja portfolijom sprovodimo optimizaciju portfolija. Na taj način svakog dana imamo na raspolaganju dva portfolija, tekući i potencijalni koji je dobijen postupkom optimizacije po predloženom kriterijumu. Ukoliko je zadovoljen uslov rebalansa (okidač se aktivira), vršimo rebalans, čime potencijalni portfolio postaje tekući. U suprotnom, zadržavamo tekući portfolio. Treba naglasiti da potencijalni portfolio dobijen optimizacijom po određenom kriterijumu može da poseduje neznatno bolju vrednost kriterijuma optimizacije u odnosu na tekući portfolio. Zbog toga smo usvojili da se rebalans izvršava samo ukoliko je vrednost kriterijuma optimizovanog portfolija dovoljno bolja od vrednosti kriterijuma optimizacije tekućeg portfolija. Minimalno poboljšanje u radu je postavljeno na 1%.

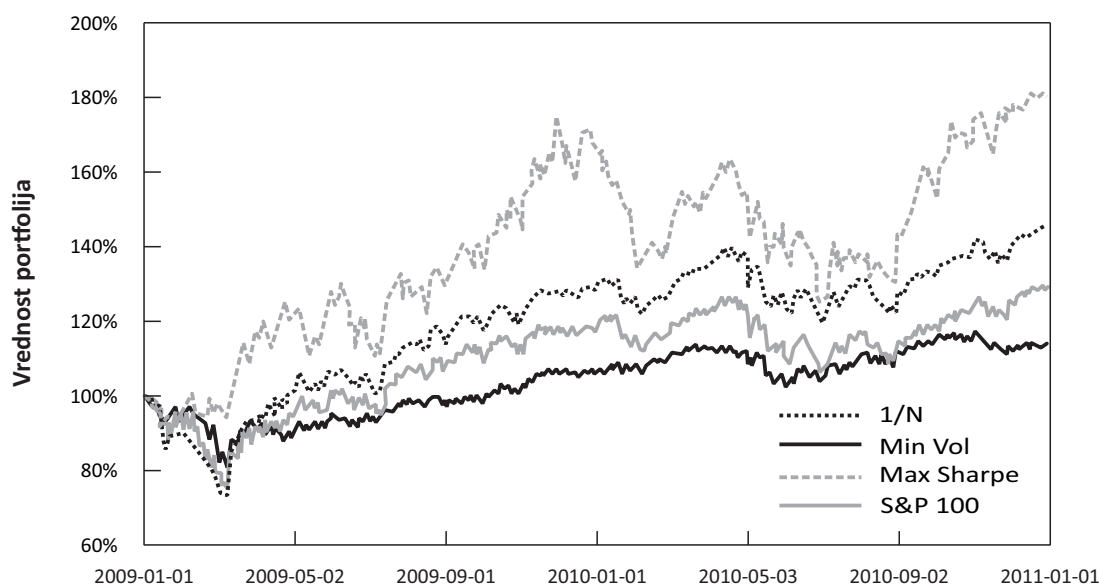
## PODACI I REZULTATI ISTRAŽIVANJA

U ovoj sekciji rada predstavljamo rezultate empirijskog istraživanja dobijene primenom predloženih strategija rebalansa. Svi numerički eksperimenti su izvršeni na istorijskim podacima. Za ovo istraživanje smo koristili 40 konstituenata indeksa S&P 100 (Tiker: OEX) koji su imali najveću vrednost tržišne kapitalizacije 6. septembra 2013<sup>6</sup>.

Upravljanje portfolijom primenom predloženih strategija rebalansa sprovedeno je u periodu od 2 godine (504 radna dana), počevši od 2. januara 2009. zaključno sa 31. decembrom 2010. Za ocenu volatilnosti i Sharpe-ovog količnika koristili smo vremenske serije od po 500 dnevnih prinosa portfolija.

U cilju analize portfolija dobijenih primenom predloženih strategija rebalansa, njihove performanse smo poredili sa performansama naivnog 1/n portfolija, kao i sa performansama referentnog indeksa S&P 100.

Na Slici 1 predstavljena je evolucija tržišne vrednosti portfolija dobijenih primenom strategije minimizacije volatilnosti (označene sa Min Vol), strategije maksimizacije Sharpe-ovog količnika portfolija



**Slika 1** Tržišna vrednost portfolija upravljanih Min Vol, Max Sharpe, naivnog 1/n portfolija i referentni S&P 100 indeks u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

(označene sa Max Sharpe), kao i 1/n portfolija zajedno sa tržišnom vrednošću indeksa S&P100. Vrednosti su početno normalizovane na 100.

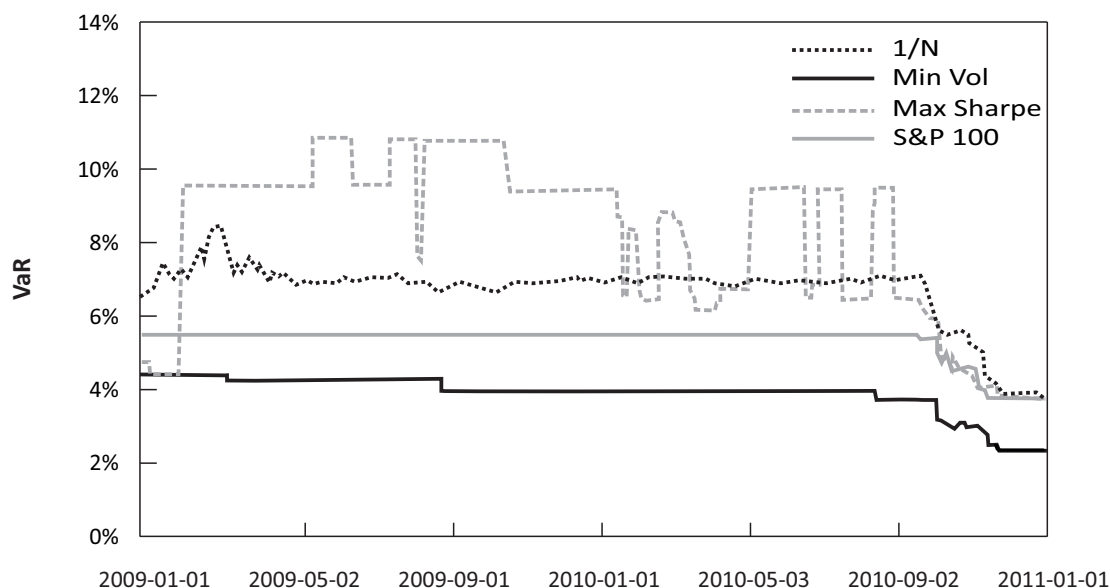
Za finansijske institucije na koje se primenjuje Bazel regulativa vrednosti ocena 1%VaR-a će uticati na nivo kapitalnih rezervi. Na Slici 2 predstavljamo evoluciju ocena 1%VaR-a u posmatranom periodu za Min Vol, Max Sharpe, 1/n portfolije, kao i za indeks S&P100.

U Tabeli 1 predstavljamo statističku analizu performansi upravljanih portfolija.

Očekivano, strategija rebalansa bazirana na minimizaciji volatilnosti obezbeđuje najniže vrednosti volatilnosti i, dodatno, najniže vrednosti ocena 1%VaR-a u periodu upravljanja portfolija. S druge strane, strategija rebalansa koja je bazirana na maksimizaciji Sharpe-ovog količnika daje portfolio sa najvećim Sharpe-količnikom, ali najvišom ocenom VaR-a i najvećom volatilnošću u posmatranom periodu. Visoka volatilnost može da bude posledica izrazitih promena u strukturi portfolija (Tabela 1). Vremenske

serije ocena VaR-a, takođe, otkrivaju velike promene u strukturi Max Sharpe portfolija.

Rezultati u Tabeli 1 pokazuju da strategija rebalansa koja se bazira na maksimizaciji Sharpe-ovog količnika obezbeđuje najveće vrednosti prinosa (ukupnog i prosečnog), kao i najveću vrednost Sharpe-ovog količnika, ali uz istovremenu najveću vrednost obima rebalansa (36 puta veću od prosečne vrednosti portfolija). S druge strane, strategija bazirana na minimizaciji volatilnosti obezbeđuje najmanju vrednost volatilnosti i VaR-a. Međutim, ova strategija se odlikuje i najnižim vrednostima prinosa. U poređenju sa performansama referentnog indeksa S&P 100, Min Vol strategija pruža nižu vrednost prinosa, ali i značajno nižu vrednost volatilnosti i VaR-a (isto važi i ako se poređenje vrši sa 1/n strategijom). Dodatno, VaR ocene su najniže kod Min Vol, a najviše kod Max Sharpe strategije, što ukazuje na razlike u efikasnosti upotrebe kapitalnih rezervi. Drugi benčmark u ovom istraživanju, naivna 1/n strategija odlikuje se performansama koje su po vrednostima pokazatelja prinosa i rizika između Min Vol i Max Sharpe



**Slika 2** Evolucija ocena 1%VaR-a portfolija za Min Vol, Max Sharpe, naivni 1/n portfolio i referentni S&P 100 indeks u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

**Tabela 1** Statistička analiza performansi Min Vol, Max Sharpe, naivnog 1/n portfolija i referentnog S&P 100 indeksa u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

	Min Vol	Max Sharpe	1/N	S&P 100
Ukupni prinos	11.18%	79.12%	43.68%	27.31%
Ukupni obim rebalansa	204.06%	3658.67%	569.25%	-
Broj rebalansa	7	46	504	-
Prosečni godišnji prinos	6.31%	34.48%	21.11%	14.45%
Volatilnost	14.18%	32.56%	24.35%	21.70%
1%VaR	2.77%	4.65%	4.62%	4.05%
Maksimalni gubitak*	-8.03%	-8.97%	-8.56%	-7.84%
Sharpe-ov količnik**	0.42	1.05	0.86	0.65
Prosečan broj hartija od vrednosti	7.2	1.6	40	100

\* Maksimalni gubitak (*max drawdown*) se računa kao maksimalni trodnevni gubitak. Period od tri dana je uzet na osnovu pretpostavke da je to period dovoljan da se izađe iz određene pozicije na likvidnim tržištima.

\*\* Prilikom računanja Sharpe-ovog količnika za vrednost bezrizične kamatne stope usvojena je stopa na jednogodišnje zapise USA trezora, čija je vrednost na dan 31. Decembar 2010 iznosila 0.29% (U.S. Department of the Treasury)

Izvor: Autori

strategije, što se moglo i očekivati od strategije koja se bazira na naivnoj diversifikaciji (Arshanapalli *et al*, 2001).

Treba naglasiti da, iako je frekvencija rebalansa Max Sharpe strategije prihvatljiva, u realnim tržišnim uslovima vrednost obima rebalansa pojedinačnih rebalansa je u većini slučajeva neprihvatljivo visoka. S druge strane, naivna 1/n strategija podrazumeva dnevni rebalans portfolija u cilju zadržavanja podjednakog učešća svih hartija od vrednosti u ukupnoj vrednosti portfolija. Stoga je opšti zaključak da su i za Max Sharpe i 1/n strategiju ukupne vrednosti obima rebalansa veoma visoke, što za posledicu ima visoke vrednosti transakcionih troškova, pa su kao takve neprihvatljive u realnim tržišnim uslovima.

U cilju smanjenja ukupnog obima rebalansa, uvodimo dodatna ograničenja za izvršavanje rebalansa.

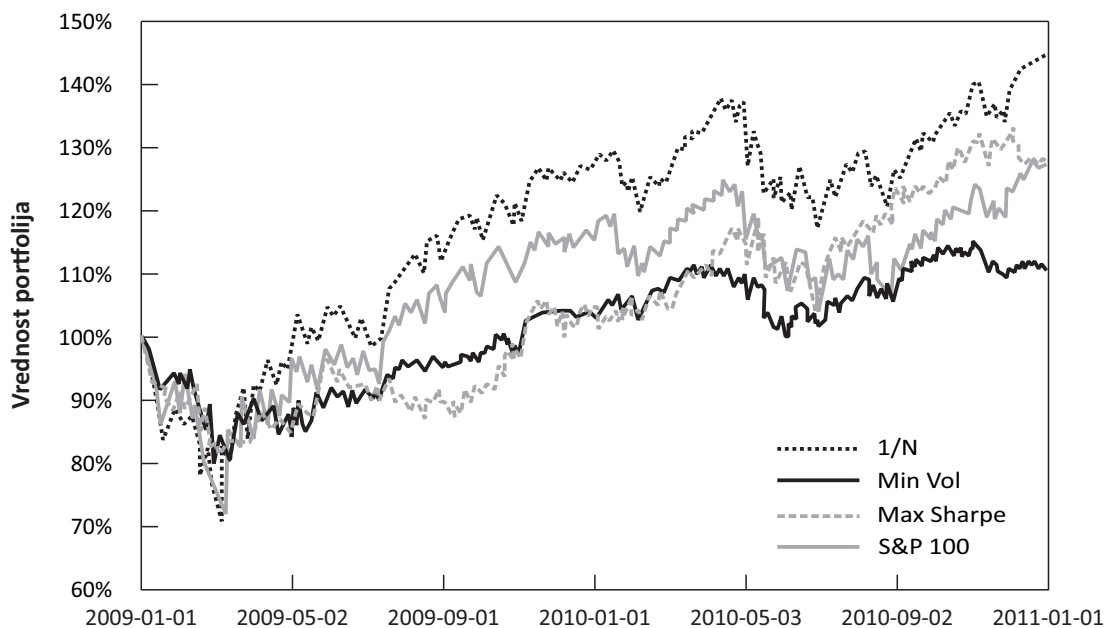
U slučaju Min Vol i Max Sharpe strategija, rebalans se izvršava samo ukoliko je rezultujući obim rebalansa manji od 50% od ukupne vrednosti portfolija. U slučaju naivne 1/n strategije, rebalans se izvršava samo

ukoliko je rezultujući obim veći od 5% od ukupne vrednosti portfolija. U suprotnom, zadržava se tekući portfolio.

Na Slici 3 predstavljena je evolucija tržišne vrednosti portfolija dobijenih primenom Min Vol, Max Sharpe i 1/n portfolio strategije i novouvedenih ograničenja. Na Slici 4 predstavljena je evolucija ocena 1%VaR-a za iste portfolije. Na obe slike ponovo smo prikazali i odgovarajuće vrednosti referentnog indeksa S&P 100.

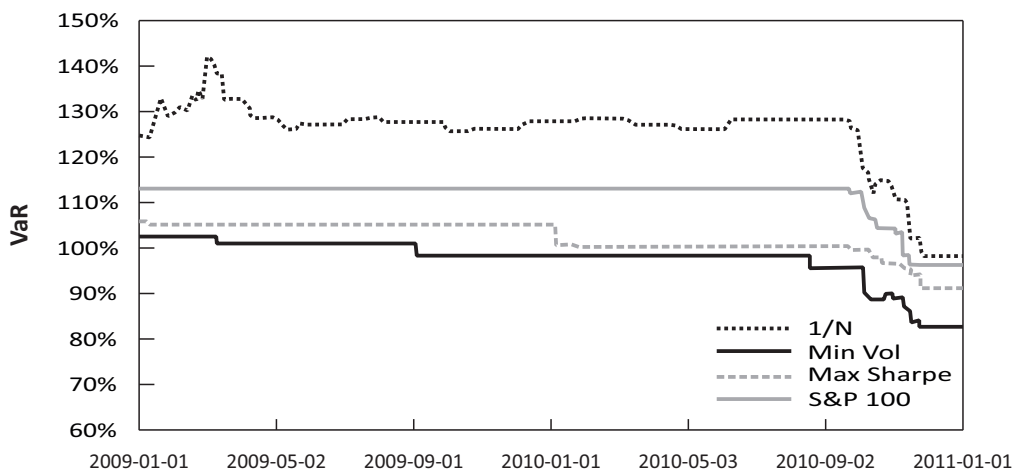
U Tabeli 2 predstavljamo statističku analizu performansi analiziranih portfolija sa dodatnim ograničenjima u pogledu vrednosti obima rebalansa.

Nakon uvođenja predloženih ograničenja Min Vol portfolio ostao je isti, dok se ukupni obim rebalansa Max Sharpe portfolija smanjio na 13.73% sa svega 3 realizacije rebalansa. Međutim, sada Max Sharpe strategija ima najniži prosečan prinos (14.08%) sa padom većim od 50% u pogledu ukupnog prinosa u poređenju sa verzijom ove strategije bez ograničenja. Štaviše, Sharpe-ov količnik više nije najveći u posmatranom skupu strategija.



**Slika 3** Tržišna vrednost Min Vol i Max Sharpe portfolija sa uvedenim ograničenjem maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa, naivnog 1/n portfolija sa uvedenim ograničenjem minimalnog obima rebalansa, i referentnog S&P 100 indeksa u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

Izvor: Autori



**Slika 4** Evolucija ocena 1%VaR-a Min Vol i Max Sharpe portfolija sa uvedenim ograničenjem maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa, naivnog 1/n portfolija sa uvedenim ograničenjem minimalnog obima rebalansa, i referentnog S&P 100 indeksa u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

Izvor: Autori



**Tabela 2** Statistička analiza performansi Min Vol i Max Sharpe portfolija sa uvedenim ograničenjem maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa, naivnog 1/n portfolija sa uvedenim ograničenjem minimalnog obima rebalansa i referentnog S&P 100 indeksa u periodu 2. januar 2009 - 31. decembar 2010.

	Min Vol Obim reb. <50%	Max Sharpe Obim reb. <50%	1/N Obim reb. >5%	S&P 100
Ukupni prinos	11.18%	27.72%	43.76%	27.31%
Ukupni obim rebalansa	204.06%	13.73%	158.48%	-
Broj rebalansa	7	3	29	-
Prosečni godišnji prinos	6.31%	14.08%	21.14%	14.45%
Volatilnost	14.18%	19.09%	24.36%	21.70%
1%VaR	2.77%	3.05%	4.45%	4.05%
Maksimalni gubitak*	-8.03%	-4.89%	-8.23%	-7.84%
Sharpe-ov količnik**	0.42	0.72	0.86	0.65
Prosečan broj hartija od vrednosti	7.2	2.0	40	100

\* Maksimalni gubitak (*max drawdown*) se računa kao maksimalni trodnevni gubitak. Period od tri dana je uzet na osnovu pretpostavke da je to period dovoljan da se izađe iz određene pozicije na likvidnim tržištima.

\*\* Prilikom računanja Sharpe-ovog količnika za vrednost bezrizične kamatne stope usvojena je stopa na jednogodišnje zapise USA trezora, čija je vrednost na dan 31. Decembar 2010 iznosila 0.29% (U.S. Department of the Treasury)

Izvor: Autori

Min Vol strategija obezbeđuje, ponovo, najnižu vrednost volatilnosti i 1%VaR-a portfolija.

Uvođenje ograničenja minimalnog dozvoljenog obima rebalansa u naivnu 1/n strategiju imalo je za posledicu značajno niži ukupni obima rebalansa (158.48% naspram 569.25%) sa svega 29 umesto 504 izvršena rebalansa. Istovremeno, sveukupne performanse 1/n portfolija su vrlo malo promenjene.

Cilj portfolio alokacije je da se postigne efekat diversifikacije, tj. da se eliminiše specifičan rizik pojedinačnih hartija od vrednosti, a da se istovremeno postignu bolje rizik-prinos karakteristike. Prema portfolio teoriji, više hartija u portfoliju obezbeđuje bolji efekat diversifikacije (Markowitz, 1952). U praksi se, međutim, investitori trude da postignu što bolje efekte diversifikacije sa ograničenim brojem hartija, jer na taj način izbegavaju velike transakcione troškove. Strategije koje su predstavljene u ovom radu testirane su na oportunitetnom skupu od 40 hartija<sup>7</sup>. U pogledu diversifikacije, Max Sharpe strategija sa svega 2 hartije

u proseku obezbeđuje skromne efekte diversifikacije bez obzira na to da li je ograničenje maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa uključeno ili ne. S druge strane, Min Vol strategija sa 7 hartija u proseku daje bolje parametre rizika (u pogledu volatilnosti i VaR-a) u odnosu na 1/n strategiju i referentni indeks S&P 100, na račun prinosa.

Sa ciljem da proverimo robusnost rezultata ispitali smo iste strategije primenjujući ih na novi period od 2 godine (504 dana) od 1. septembra 2011. do 4. septembra 2013. godine. U Tabeli 3 predstavljamo statističku analizu performansi Min Vol i Max Sharpe portfolija sa uvedenim ograničenjem maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa, naivnog 1/n portfolija sa uvedenim ograničenjem minimalnog obima rebalansa i referentnog S&P 100 indeksa za novoposmatrani period (S&P 100 index, <https://finance.yahoo.com>). Dobijeni rezultati su konzistentni sa rezultatima dobijenim za prethodno analizirani period (osim što sada Max Sharpe strategiju karakterišu veći broj rebalansa i veći obim rebalansa). Da bi rezultati bili u

**Tabela 3** Statistička analiza performansi Min Vol i Max Sharpe portfolija sa uvedenim ograničenjem maksimalnog dozvoljenog obima rebalansa, naivnog 1/n portfolija sa uvedenim ograničenjem minimalnog obima rebalansa i referentnog S&P 100 indeksa u periodu 1. septembar 2011- 4. septembar 2013.

	Min Vol Obim reb.<50%	Max Sharpe Obim reb. <50%	1/N Obim reb.>5%	S&P 100
Ukupni prinos	23.54%	35.05%	43.92%	36.33%
Ukupni obim rebalansa	82.15%	273.03%	67.19%	
Broj rebalansa	5	9	14	
Prosečni godišnji prinos	11.14%	16.15%	19.39%	16.69%
Volatilnost	10.45%	14.82%	15.15%	15.24%
1%VaR	1.87%	2.37%	2.60%	2.59%
Maksimalni gubitak*	-3.70%	-4.89%	-8.23%	-5.89%
Sharpe-ov količnik**	1.04	1.07	1.26	1.07
Prosečan broj hartija od vrednosti	5.4	3.4	40	100

\* Maksimalni gubitak (*max drawdown*) se računa kao maksimalni trodnevni gubitak. Period od tri dana je uzet na osnovu pretpostavke da je to period dovoljan da se izade iz određene pozicije na likvidnim tržištima.

\*\* Prilikom računanja Sharpe-ovog količnika za vrednost bezrizične kamatne stope usvojena je stopa na jednogodišnje zapise USA trezora, čija je vrednost na dan 31. Decembar 2010 iznosila 0.29% (U.S. Department of the Treasury)

Izvor: Autori

potpunosti uporedivi, koristimo istu kamatnu stopu na jednogodišnje zapise američkog trezora od 0.29%.

## ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljene su dve strategije upravljanja portfolijom, jedna bazirana na minimizaciji volatilnosti, i druga koja je bazirana na maksimizaciji Sharpe-ovog količnika. Performanse predloženih strategija su poređene sa dva referentna portfolija, jedan je tržišni portfolio predstavljen indeksom S&P 100, a drugi je dobijen primenom 1/n strategije.

Konzistentno sa hipotezom H1, rezultati pokazuju da Min Vol strategija daje portfolio sa minimalnim rizikom (merenim volatilnošću i 1%VaR-om). Max Sharpe strategija rezultuje portfolijom sa maksimalnim prinosom (apsolutnim prinosom i prinosom po jedinici rizika merenog Sharpe-ovim količnikom), što je u skladu sa hipotezom H2. Iako su u teorijskom smislu rešenja privlačna, u realnim tržišnim uslovima dobijena rešenja nisu prihvatljiva s obzirom na vrlo visoke vrednosti obima rebalansa<sup>8</sup>. U cilju smanjenja

i kontrole obima rebalansa uveli smo ograničenja maksimalno dozvoljenog obima.

Primena ograničenja obima rebalansa u Max Sharpe strategiji je rezultirala značajnim smanjenjem ukupnog obima rebalansa, ali je za posledicu imala drastično pogoršanje performansi. Međutim, primena istog ograničenja u Min Vol strategiji nije uticala na krajnji portfolio, dok su performanse u pogledu rizika ostale superiorne u odnosu na referentni S&P 100 indeks i 1/n portfolio. Na osnovu svega navedenog može se zaključiti da Min Vol strategija predstavlja prihvatljivu i pogodnu alternativu strategijama zasnovanim na tržišnoj kapitalizaciji ili jednakim ponderima.

Efikasno upravljanje portfolijom hartija od vrednosti je veoma aktuelno kako u naučnim finansijskim krugovima, tako i u praksi. Budući pravci istraživanja bi mogli biti usmereni ka uvođenju različitih modela transakcionih troškova i analizi uticaja različitih kriterijuma rebalansa, kao i različitih dužina vremenskih serija na osnovu kojih se dobijaju estimacije. U ovom radu mi smo primenili dva ekstremna pristupa u kontroli obima rebalansa, prvi, koji je podrazumevao samo praćenje bez kontrole

rebalansa, i drugi, koji je podrazumevao da je rebalans dozvoljen samo ukoliko je vrednost obima rebalansa manja od neke unapred definisane. Matematički gledano, efekat uvedenog ograničenja je smanjenje prostora mogućih rešenja. Buduće istraživanje bi moglo da bude usmereno ka unapređenju postupka optimizacije na način da se uvede maksimalni dozvoljeni obim rebalansa po transakciji.

## ZAHVALNICA

Ovaj rad je deo projekata osnovnih istraživanja (br. OH 179005 i III-44010), koje finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

## ENDNOTE

- 1 Poslednjih par godina tržišni indeksi postaju investibilni, jer se pojavljuje sve veći broj indeksnih fondova. Videti, na primer, brošuru za fond iShares S&P 100 ETF (Tiker: OEF).
- 2 Optimalna strategija rebalansa je ona koja minimizira očekivane transakcione troškove i grešku replikacije.
- 3 Bazelske odredbe iz 1988 prvi put definišu kapitalnu adekvatnost zasnovanu na riziku.
- 4 Mi uzimamo da je broj radnih dana u toku jedne godine 252, s tim da je česta alternativa 250.
- 5 Sharpe-ov količnik je inicijalno predstavljen kao „nagrada za varijabilnost” (Sharpe, 1966; Bacon, 2008).
- 6 Uvrstili smo prvih 40 konstituenata baznog indeksa S&P 100 za koje su vrednosti dostupne na dan 3. decembar 2007.
- 7 Ovih 40 hartija čine više od 70% tržišne kapitalizacije baznog S&P 100 indeksa.
- 8 Rezultati koje nismo predstavili pokazuju da Max Sharpe strategija dovodi do povremenih velikih promena u sastavu portfolija.

## REFERENCE

Alexander, C. (2008). *Quantitative Methods in Finance*. London, UK: John Wiley & Sons Ltd.

Arshanapalli, B., Coggin, T. D., & Nelson, W. (2001). Is Fixed-Weight Asset Allocation Really Better? *The Journal of Portfolio Management*, 27(4), 27-38. doi: 10.3905/jpm.2001.319799

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228. doi: 10.1111/1467-9965.00068

Bacon, C. (2008), *Practical portfolio performance measurement and attribution*. London, UK: John Wiley & Sons.

Basel Committee on Banking Supervision, (1996). *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*. Bank for International Settlements.

Choi, U. J., Jang, B. G., & Koo, H. K. (2007). An algorithm for optimal portfolio selection problems with transaction costs and random lifetimes. *Applied Mathematics and Computation*, 191, 239-252. doi: 10.1016/j.amc.2007.02.100

Donohue, C., & Yip, K. (2003). Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs. *Journal of Portfolio Management*, 29, 49-63. doi: 10.3905/jpm.2003.319894

DeMiguel, V., Lorenzo, G., & Raman, U. (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915-1953. doi: 10.1093/rfs/hhm075

Fabozzi F. J., Focardi, S., & Jonas, C. (2007). Trends in quantitative equity management: Survey results. *Quantitative Finance*, 7, 115-122. doi: 10.1080/14697680701195941

Factsheet for the iShares S&P 100 ETF, učitano 8. jula 2014. godine sa <http://www.ishares.com/us/library?materialType=Prospectus&keyword=US4642871010>.

Gaivoronski, A. A., Krylov, S., & Van der Wijst, N. (2005). Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. *European Journal of Operational Research*, 163(1), 115-161. doi: 10.1016/j.ejor.2003.12.001

Hsu, J. (2012). Why We Don't Rebalance. Učitano 8. jula 2014. godine sa <http://www.etf.com/sections/research/12647-why-we-dont-rebalance.html?showall=&fullart=1&start=4>

Istorijske cene S&P 100 indeksa i njegovih konstituenata učitane na dan 8. septembar 2013 <https://finance.yahoo.com/>

Jaksic, M. (2012). Risk management of portfolio securities. *Economic horizons*, 14(3), 155-168. doi: 10.5937/ekonhor1203151J

Kozhan, R., & Schmid, W. (2009). Asset allocation with distorted beliefs and transaction costs. *European Journal of Operational Research*, 194(1), 236-249. doi: 10.1016/j.ejor.2007.12.002

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91. doi: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119-138.
- Szego, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1253-1272. doi: 10.1016/S0378-4266(02)00262-5
- Sippel, K. (2012). Trading Costs and Index Design. *Journal of Indexes Europe*, September/October, 8-13, učitano 8. jula 2014. godine sa <http://europe.etf.com/europe/publications/journal-of-indexes/articles/8467-trading-costs-and-index-design.html>
- U.S. Department of the Treasury, <http://www.treasury.gov/Pages/default.aspx>
- Yu, J. R., & Lee, W. Y. (2011). Portfolio rebalancing model using multiple criteria. *European Journal of Operational Research*, 209 (2), 166-175. doi: 10.1016/j.ejor.2010.09.018

Primljeno 9. jula 2014,  
nakon revizije,  
prihvaćeno za publikovanje 15. decembra 2014.  
Elektronska verzija objavljena 22. decembra 2014.

**Mikica Drenovak** je docent na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Kragujevcu. Doktorirao je na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, u oblasti kvantitativnih finansija. Ključne oblasti njegovog istraživačkog interesovanja su finansijska tržišta, upravljanje rizikom i optimizacija portfolija.

**Vladimir Ranković** je vanredni profesor na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Kragujevcu. Doktorat tehničkih nauka stekao je u Centru za interdisciplinarne i multidisciplinarne studije i istraživanja Univerziteta u Kragujevcu. Osnovne oblasti njegovog istraživačkog interesovanja su razvoj inteligentnih sistema i računskih metoda i tehnika, i njihova primena u ekonomiji.

## MARKOWITZ PORTFOLIO REBALANCING WITH TURNOVER MONITORING

Mikica Drenovak, Vladimir Rankovic

*Faculty of Economics, University of Kragujevac, Kragujevac, Serbia*

Active portfolio management implies periodic rebalancing, i.e. a change in the structure of the existing portfolio. Rebalancing is aimed at improving the performance of the managed portfolio by adjusting it with respect to the given objective. The main objective of this research is to test two portfolio rebalancing strategies, one based on market risk and another on optimal risk-return tradeoff. We use optimal volatility or Sharpe of portfolio as a criterion for the initial portfolio allocation and rebalancing over the observed period. In order to obtain solutions that can be applied in practice, we impose rebalance triggers designed to control the portfolio turnover and corresponding transaction costs. The results suggest that the minimum volatility strategy can be accepted as an eligible investment alternative for risk adverse investors since it provides superior risk performance compared to the reference S&P 100 index and 1/n portfolio, with a relatively low level of turnover and a low rebalance frequency.

**Keywords:** portfolio management, volatility, Sharpe ratio, portfolio rebalancing, turnover

JEL Classification: C44, C61, G11